**项目名称：**可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程及相关方程的定性分析

**主要完成人及其完成单位：**黎野平（南通大学）；王林峰（南通大学）

**学科分类名称：**双曲型偏微分方程，非线性偏微分方程

**推荐单位：**江苏省工业与应用数学协会

**项目简介：**

可压缩Navier-Stokes方程能够描述液体和空气这样的流体物质的运动，是现代非线性偏微分方程的主要研究对象。后来，为了考察水汽混合流体运动中由扩散截面引起的相移动，欧洲化学家Van der Waals在1894年观察到两相流的密度梯度能够描述这种扩散截面，进而1901年欧洲物理学家Korteweg在经典可压缩流体方程中引入了扩散张力项。根据这些，美国应用数学家Dunn和Serrin在1980年利用二阶梯度方法，写出了完整的可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程。本项目主要对可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程及相关方程进行定性分析，建立了若干重要的理论框架，发展了一些重要的数学问题分析方法，研究了度量满足一类张量方程的拟Einstein流形。项目完成人多年来一直在这个方向开展研究工作，取得一系列深刻的、具有重要理论意义的研究成果。主要成果如下：

1）研究了在半空间上粘性和毛细系数都依赖密度的一维可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程的具大扰动无渗透初边值问题强解的适定性和渐近性态。首先利用压力、粘性和毛细系数的指数关系及方程的内涵结构，通过精细的能量估计，得到基本能量估计。进而构造若干巧妙的辅助函数，建立密度函数的正的上下界。根据这些，我们能够建立更高阶导数的能量估计。我们的方法为研究相关流体方程的具大扰动的初值问题和初边值问题解的适定性和性态分析提供了非常强的借鉴和参考。

2）研究了三维等熵和完全可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程的初值问题强解的整体存在性和大时间行为。首先利用密度、速度场及温度的远场状态以及一维等熵和完全可压缩Navier-Stokes -Korteweg方程的结果，构造了它们的平面稀疏波。从而使用精细的能量估计和稀疏波的时间衰减率，证明了高维等熵和完全可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程初值问题的平面稀疏波的稳定性。这些结果对同行研究其它相关具耗散结构的流体方程产生了积极地影响。

3）研究了三维可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程在全空间或者周期区域上的局部光滑解的零马赫数极限。基于三维可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程的局部存在理论，首先建立了可收敛性原理。然后我们证明了当马赫数足够小时，三维可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程的初值问题在相应的不可压缩Navier-Stokes方程具有光滑解的时间区间内具有唯一的光滑解。同时，我们还得到了这个光滑解收敛到不可压缩Navier-Stokes-Korteweg方程光滑解的收敛率。我们的方法能够解决其它可压缩流体方程的零马赫数极限和相关方程的极限分析。

4）研究了拟Einstein流形第一非零特征值、数量曲率的空隙估计。首先建立了一个光滑度量测度空间上Neumann热核的比较定理，然后借助于这个比较定理、Min-Max方法、Bochner公式、极大值原理以及拟Einstein流形的一个直径估计，得到拟Einstein流形第一非零特征值的一个上下界估计。最后，在充分利用拟Einstein流形的度量满足的张量方程的基础上，借助于对势函数的点态和积分估计，得到数量曲率的上下界估计以及拟Einstein流形的一个刚性结论。